Problème 7 : Agrégation externe 2002

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques générales

Algèbre sesquilinéaire ; espaces semiquadratiques.

Solution par F. SUFFRIN, Lycée Kléber Strasbourg

I — Formes sesquilinéaires symétriques

1 Existence de x et y : La relation de polarisation s'écrit, pour tout $(u,v) \in E^2$

$$b(u,v) = \frac{1}{4}\left(b(u+v,u+v) - b(u-v,u-v) + ib(u+iv,u+iv) - ib(u-iv,u-iv)\right).$$

On en déduit $b = 0$ si $b(u,u) = 0$ pour tout $u \in E$.
Il existe donc $x \in E$ tel que $b(x,x) \neq 0$, d'où le premier point.

Le vecteur $y = |b(x,x)|^{-\frac{1}{2}}x$ vérifie les propriétés requises alors.

2 Existence d'une base semi-orthonormée : On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geqslant 1$ de E. Traitons le cas $n = 1$.
Introduisons x un vecteur directeur de E. Si $b(x,x) = 0$ le choix de (x) convient sinon on prend (y), où y est le vecteur précédemment associé.

Supposons le résultat vrai pour tout espace sesquilinéaire symétrique de dimension $n-1 \geqslant 1$. Soit (E,b) un espace sesquilinéaire symétrique de dimension n.

Si b est nulle, toute base de E constitue une base semi-orthonormée et le résultat est vrai.

Sinon, d'après la question précédente, il existe $e_1 \in E$ tel que $b(e_1,e_1) = \pm 1$. Introduisons alors $H = (\mathbb{C}e_1)^{\perp}$. H est le noyau de la forme linéaire $b(.,e_1)$ qui est non nulle puisque $b(e_1,e_1) \neq 0$. L'espace (H,b) vérifie alors l'hypothèse de récurrence et par suite, il existe $(e_2,\cdots,e_n)$ une base semi-orthonormée de H.

Ainsi $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ constitue une base semi-orthonormée de E, ce qui assure le résultat au rang n.

3 Base semi-orthonormée associée à A : La base

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)\right)$$

répond à la question.

4-a Étude des intersections proposées : Pour tout vecteur

$$x = \sum_{e_i \in E_-} x_i e_i + \sum_{e_i \in E_0} x_i e_i$$

de $E_- \oplus E_0$, on a

$$b(x,x) = -\sum_{e_i \in E_-} x_i^2 \leqslant 0$$

donc b prend des valeurs $\leqslant 0$ sur $E_- \oplus E_0$. Comme elle est définie positive sur F, $F \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\}$.

Un raisonnement analogue conduit à $F \cap (E_+ \oplus E_0) = \{0\}$ si b est définie négative sur F.

4-b Invariance de $\boldsymbol{\sigma(E,b)}$: Nous allons établir l'invariance de dim E_+.

Considérons $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une base semi-orthonormée de E et E'_+, E'_-, E'_0 les sous-espaces vectoriels associés.
Pour tout vecteur $x = \sum_{e_i \in E'_+} x_i e_i$ de E'_+, on a

$$b(x,x) = \sum_{e_i \in E'_+} x_i^2 \geqslant 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$, donc b est définie positive sur E'_+. D'après la question précédente $E'_+ \cap (E_- \oplus E_0) = \{0\}$, ce qui assure dim $E'_+ \leqslant$ dim E_+ et par symétrie dim $E'_+ =$ dim E_+.

De manière analogue on a dim $E'_- =$ dim E_-, d'où

$$\sigma(E,b) = \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i) = \text{ dim } E_+ - \text{ dim } E_-$$

est indépendant du choix de $\mathcal{B}$.

PS : Bien sur, (dim E_+, dim E_-) n'est autre que la signature de b, au sens usuel.

5 Détermination de $\boldsymbol{\sigma(E)}$: La matrice canoniquement associée à b est

$$B = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la matrice d'une symétrie orthogonale dans $\mathbb{C}^n$ muni de la structure hermitienne usuelle.
B étant unitairement semblable à une matrice diagonale de terme égal à ± 1, on a

$$\sigma(E) = \text{trace } B = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Autre méthode : Un raisonnement direct permet de voir que pour n pair,

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_i + e_{n+1-i})_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \; , \; \frac{\sqrt{2}}{2}(e_i - e_{n+1-i})_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}} \right)$$

est une base semi-orthonormée et dans ce cas $\sigma(E) = 0$.

Sinon pour n impair

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_i + e_{n+1-i})_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}} \; , e_{\frac{n+1}{2}}, \; \frac{\sqrt{2}}{2}(e_i - e_{n+1-i})_{1 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}} \right)$$

est une base semi-orthonormée et donc $\sigma(E) = 1$.

6-a Existence de $\mathcal{B}$ dans le cas $x \in E^{\perp}$: Si $n = 1$ le résultat est clair.

Sinon considérons H un hyperplan de E ne contenant pas $x = e_1$. D'après **I-2** il existe dans (H, b) une base semi-orthonormée $(e_2, \cdots, e_n)$.

La base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ vérifie les propriétés requises alors.

6-b Cas $b(x, x) \neq 0$: Considérons le vecteur $e_1 = |b(x, x)|^{-\frac{1}{2}} x$.

On vérifie comme en **I-2** que $H = (\mathbb{C}e_1)^{\perp}$ est un hyperplan de E. Considérons alors $(e_2, \cdots, e_n)$ une base semi-orthonormée de H.

La base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et le réel $\lambda = |b(x, x)|^{\frac{1}{2}}$ répondent à la question.

6-c Cas $b(x, x) = 0$ et $x \notin E^{\perp}$: x n'est pas dans $E^{\perp}$ donc $b(., x)$ est une forme linéaire non nulle et il existe $y \in E$ tel que $b(y, x) = 1$.
Les vecteurs $e_1 = \lambda x + y$ et $e_2 = \mu x - y$, avec

$$\lambda = \frac{1}{2}(1 - b(y, y)) \text{ et } \mu = \frac{1}{2}(1 + b(y, y))$$

vérifient les relations

$$b(e_1, e_1) = -b(e_2, e_2) = 1,\ b(e_1, e_2) = 0 \text{ et } x = e_1 + e_2.$$

et donc sont linéairement indépendant. Désignons par Π le plan qu'ils engendrent.
Montrons alors l'égalité $E = \Pi \oplus \Pi^{\perp}$.

Un vecteur ξ de Π s'écrit $\xi = b(\xi, e_1)e_1 - b(\xi, e_2)e_2$. Celui-ci est donc dans $\Pi^{\perp}$ si et seulement s'il est nul, d'où la somme directe proposée. (b est de signature $(1, 1)$ sur Π donc non dégénérée)
En outre, pour tout $\xi \in E$, on a la décomposition

$$\xi = \underbrace{b(\xi, e_1)e_1 - b(\xi, e_2)e_2}_{\text{vecteur de } \Pi} + \underbrace{\xi - b(\xi, e_1)e_1 + b(\xi, e_2)e_2}_{\text{vecteur de } \Pi^{\perp}}.$$

On en déduit l'égalité annoncée.

Considérant $(e_3, \cdots, e_n)$ une base semi-orthonormale de $\Pi^{\perp}$, la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n)$ vérifie les propriétés requises alors.

7 $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$: Supposons $x \in E^{\perp}$.

Alors $G = E$ et on a

$$\sigma(F) + \sigma(G) = 0 + \sigma(E) = \sigma(E),$$

d'où ce premier point.

Supposons $b(x, x) \neq 0$.

Gardons alors les notations de la question **I-6-b**. On peut écrire

$$\begin{aligned}\sigma(F) + \sigma(G) &= b(e_1, e_1) + \sigma(H)\\ &= b(e_1, e_1) + b(e_2, e_2) + \cdots + b(e_n, e_n)\\ &= \sigma(E)\end{aligned}$$

d'où ce second point.

Supposons enfin $b(x, x) = 0$ et $x \notin E^{\perp}$ puis gardons les notations de **I-6-c**.

G est le noyau de la forme linéaire $b(.,x) \neq 0$ et donc est un hyperplan de E. On en déduit que $(x, e_3, \cdots, e_n)$ est une base semi-orthonormée de G et par suite

$$\begin{aligned}\sigma(F) + \sigma(G) &= b(x,x) + b(x,x) + b(e_3,e_3) + \cdots + b(e_n,e_n) \\ &= b(e_3,e_3) + \cdots + b(e_n,e_n).\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\sigma(E) &= b(e_1,e_1) + b(e_2,e_2) + b(e_3,e_3) + \cdots + b(e_n,e_n) \\ &= 1 - 1 + b(e_3,e_3) + \cdots + b(e_n,e_n) \\ &= b(e_3,e_3) + \cdots + b(e_n,e_n)\end{aligned}$$

ce qui fournit

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G)$$

d'où ce dernier point et le résultat demandé.

8 $\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^\perp)$: Fixons un entier naturel $1 \leqslant k < p$. On a

$$F_{k+1}^\perp = F_k^\perp \cap (\mathbb{C}u_{k+1})^\perp.$$

La droite $\mathbb{C}u_{k+1}$ étant contenue dans $F_k^\perp$, on peut interpréter $F_{k+1}^\perp$ comme l'orthogonal de $\mathbb{C}u_{k+1}$ dans $((F_k)^\perp, b)$. La question précédente fournit alors

$$\sigma(F_{k+1}^\perp) = \sigma((F_k)^\perp, b) - \sigma(\mathbb{C}u_{k+1})$$

ou encore

$$\sigma(G_{k+1}) = \sigma(G_k) - b(u_{k+1}, u_{k+1}).$$

Par ailleurs, on a $\sigma(F_{k+1}) = \sigma(F_k) + b(u_{k+1}, u_{k+1})$, d'où par addition

$$\sigma(G_{k+1}) + \sigma(F_{k+1}) = \sigma(G_k) + \sigma(F_k).$$

Il en résulte

$$\sigma(E) = \sigma(F_1) + \sigma(G_1) = \sigma(F_2) + \sigma(G_2) = \cdots = \sigma(F_p) + \sigma(G_p)$$

et en particulier

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^\perp).$$

Remarque : Rappelons que toute somme indexée par l'ensemble vide est nulle. C'est ainsi que l'on a $\sigma(\{0\}) = 0$.

II — Espaces sesquilinéaires

1-a $b(x,y) = {}^tXM\overline{Y}$: On peut déjà écrire, avec des notations évidentes

$$b(x,y) = b(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i e_i, \sum_{1\leqslant i\leqslant n} y_i e_i) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i \overline{y_j}\; b(e_i, e_j).$$

Par ailleurs, on a successivement

$${}^tXM\overline{Y} = \begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n$$

où l'on a posé, pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$z_i = b(e_i, e_1)\overline{y_1} + b(e_i, e_2)\overline{y_2} + \cdots + b(e_i, e_n)\overline{y_n}.$$

Il en résulte

$$^t XM\overline{Y} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i \overline{y_j}\, b(e_i, e_j) = b(x, y),$$

ce qui constitue le résultat.

1-b-c Étude des CNS proposées : Il suffit de remarquer, pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in {}^{\perp}E &\iff \forall\, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\ {}^t XM\overline{Y} = 0 \\ &\iff {}^t MX = 0. \end{aligned}$$

puis, pour tout $y \in E$

$$\begin{aligned} y \in E^{\perp} &\iff \forall\, X \in M_{n,1}(\mathbb{C}),\ {}^t XM\overline{Y} = 0 \\ &\iff \overline{M}Y = 0. \end{aligned}$$

Les matrices $M, \overline{M}$ et ${}^t M$ étant de même rang, les conditions proposées en sont des conséquences directes.

2-a $^{\perp}F$ et $F^{\perp}$ sont des ss-ev : En vue d'une prochaine utilisation, introduisons sur E^2 l'application

$$b' : (x, y) \mapsto \overline{b(y, x)}.$$

C'est une forme sesquilinéaire dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est ${}^t\overline{M}$.
Notons en outre que les orthogonaux à gauche et à droite de F dans (E, b') sont obtenues simplement en échangeant ceux dans (E, b).

On peut alors écrire

$$^{\perp}F = \bigcap_{y \in F} \text{Ker } b(., y) \qquad \text{et} \qquad F^{\perp} = \bigcap_{y \in F} \text{Ker } b'(., y)$$

d'où le résultat.

2-b Inégalités souhaitées : Considérons $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $F \cap E^{\perp}$ que nous complétons en $(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_q)$ une base de F.

Un vecteur x de E est dans $^{\perp}F$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{c} b(x, e_1) = 0 \\ \vdots \\ b(x, e_q) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} b(x, e_{p+1}) = 0 \\ \vdots \\ b(x, e_q) = 0 \end{array} \right. .$$

Les $q-p$ dernières formes linéaires $(b(., e_k))_{p+1 \leqslant k \leqslant q}$ sont linéairement indépendantes car pour des complexes $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_q$ tels que

$$\lambda_{p+1} b(., e_{p+1}) + \cdots + \lambda_q b(., e_q) = 0,$$

on peut écrire :

$$\forall\, x \in E,\ b(x, \sum_{k=p+1}^{k=q} \overline{\lambda_k} e_k) = 0$$

ou encore

$$\sum_{p+1\leqslant k\leqslant q} \overline{\lambda_k} e_k \in F\cap E^{\perp},$$

c'est-à-dire $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_q = 0$ par définition de $(e_1, \cdots, e_q)$.

Le système linéaire précédent est donc de rang $q-p$, d'où on en déduit la relation

$$\dim\ F + \dim\ {}^{\perp}F = \dim\ E + \dim\ (F\cap E^{\perp}).$$

Ce résultat sur b' fournit la relation

$$\dim\ F + \dim\ F^{\perp} = \dim\ E + \dim\ (F\cap {}^{\perp}E).$$

Donc on peut écrire

$$\dim\ F + \dim\ {}^{\perp}F \geqslant \dim\ E \quad \text{et} \quad \dim\ F + \dim\ F^{\perp} \geqslant \dim\ E$$

avec égalité si b est non dégénérée sur E.

2-c $E = F \oplus F^{\perp} = F \oplus {}^{\perp}F$: b est non dégénérée sur F donc on a

$$F\cap F^{\perp} = F\cap {}^{\perp}F = \{0\}.$$

Les relations découlent de ce qui précède alors.

3 Exemple demandé : b a pour expression sur E

$$b(x,y) = x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_2}.$$

La droite $F = \mathbb{C}(e_1 - e_2)$ admet E et F pour orthogonal respectivement à droite et à gauche. Elle vérifie donc les propriétés requises.

4 Existence de f : Gardons les notations de la question **II-1**.

b est sesquilinéaire symétrique si et seulement si $b = b'$, c'est-à-dire si et seulement si M est hermitienne.

Par ailleurs, si f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$, on a

$$\forall\,(x,y)\in E^2,\ b(f(x),y) = {}^t\!(AX)M\overline{Y} = {}^tX({}^tAM)\overline{Y}.$$

f vérifie les propriétés requises si et seulement si A est inversible et ${}^tAM$ est hermitienne.

Si M est de rang $r\in\mathbb{N}$, ils existent P et Q inversibles telles que

$$M = P^{-1}\mathrm{Diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{r\ \text{fois}},0,\cdots,0)Q.$$

Les conditions se trouvent donc réunies pour le choix de f tel que $A = {}^tP\overline{Q}$.

5-a $|\varepsilon| = 1$: b est non nulle donc il existe $(x,y)\in E^2$ tel que $b(x,y)\neq 0$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \varepsilon\overline{b(y,x)} \\ &= \varepsilon\ \overline{\varepsilon\overline{b(x,y)}} \\ &= |\varepsilon|^2 b(x,y), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

5-b Exemple demandé : On prend la forme sesquilinéaire b dont la matrice canoniquement associée dans $\mathbb{C}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

6-a Existence de $\boldsymbol{\alpha}$: Si $\varepsilon = e^{i\theta}$, le complexe $\alpha = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ répond à la question.

6-b $\boldsymbol{\beta b}$ est symétrique ssi $\boldsymbol{\beta\alpha^{-1}}$ est réel : On supposera b non nulle.

Cette condition est clairement suffisante.

Considérons un complexe β non nul tel que βb soit symétrique.
Alors d'après **I-1**, il existe $x \in E$ tel que $\alpha b(x,x) \neq 0$. Ceci permet de voir que

$$\beta\alpha^{-1} = (\beta b(x,x))\ (\alpha b(x,x))^{-1}$$

est réel puis que la condition est nécessaire d'où le résultat annoncé.

$\boldsymbol{\sigma(E,\beta b) = \mathrm{sign}(\beta\alpha^{-1})\sigma(E,\alpha b)}$: Considérons $(e_1, \cdots, e_n)$ une base semi-orthonormée dans $(E, \alpha b)$. Alors la base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ définie par $\varepsilon_k = |\beta\alpha^{-1}|^{-\frac{1}{2}} e_k$ est semi-orthonormée dans $(E, \beta b)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma(E,\beta b) &= \sum_{k=1}^{n} \beta b(\varepsilon_k, \varepsilon_k) \\ &= \mathrm{sign}(\beta\alpha^{-1}) \sum_{k=1}^{n} \alpha b(e_k, e_k) \\ &= \mathrm{sign}(\beta\alpha^{-1})\ \sigma(E, \alpha b) \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

III — Espaces semiquadratiques

1 $\boldsymbol{u = \varepsilon}$: f est non nulle donc considérons $x \in E$ tel que $f(x) = 1$.
On peut écrire $b(x,x) - u\overline{b(x,x)} = \alpha$. En conjuguant, on obtient $\overline{b(x,x)} - \overline{u} b(x,x) = \overline{\alpha}$ puis en combinant $\alpha + u\overline{\alpha} = 0$ c'est-à-dire $u = \varepsilon$.

2-a Existence d'un vecteur centre : On peut par exemple utiliser les matrices mais on va raisonner directement.

Montrons l'unicité sous réserve d'existence. Si e et e' répondent au problème, alors $(e - e') \in E^{\perp} = \{0\}$ car b est non dégénérée, d'où ce premier point.

Montrons l'existence de e. Si f est nulle $e = 0$ répond à la question.
Sinon $\mathrm{Ker} f$ est un hyperplan de E et son orthogonal à droite est une droite $\mathbb{C}\zeta$ dont l'orthogonal à gauche est $\mathrm{Ker} f$ puisque b est non dégénérée.

Il existe donc $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $f = \overline{\mu} b(., \zeta)$ puis le vecteur $e = \mu\zeta$ convient alors.

$\boldsymbol{|\lambda| = 1}$: On a $f(e) = b(e,e)$ donc on obtient le résultat en remplaçant x et y par e puis ε par $-\alpha/\overline{\alpha}$ dans (SQ).

2-b $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même poids : Considérons φ un isomorphisme de E sur E'. On vérifie aisément que φ envoie le vecteur centre de $\mathcal{E}$ sur celui de $\mathcal{E}'$, ce qui fournit avec des notations évidentes $f'(e') = f'(\varphi(e)) = f(e)$, c'est-à-dire $\lambda = \lambda'$.

2-c Cas $\mathcal{E}$ de type T0 : On a immédiatement $e = 0$ et $\lambda = 1$.

3 Ker$f = F \iff x \in \mathbb{C}e$: Le raisonnement mené en **III-2-a** montre que Ker$f$ a pour orthogonal à droite la droite $\mathbb{C}e$, droite pour laquelle Ker$f$ est l'orthogonal à gauche. L'équivalence proposée en découle.

4 Existence et unicité de b : $E = \mathbb{C}$ donc il existe un complexe u tel que :

$$\forall\,(z,t) \in \mathbb{C}^2,\ b(z,t) = uz\bar{t}.$$

Posons alors $\theta = \operatorname{Arg}\lambda \in]0, 2\pi[$.

Supposons b solution de notre problème. Alors son vecteur centre e vérifie

$$b(e,e) = e = \frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}}.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\forall\, z \in \mathbb{C},\ b(z,e) = z &\iff \forall\, z \in \mathbb{C},\ uz\overline{e} = z\\ &\iff e = \frac{1}{\overline{u}}\end{aligned}$$

ce qui assure que le complexe u est déterminé de manière unique par

$$u = \frac{\alpha\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - i\ \mathrm{cotg}\frac{\theta}{2}\right).$$

Réciproquement, si cette dernière relation est vérifiée, on a successivement :

$$\begin{aligned}\forall\,(z,t) \in \mathbb{C}^2,\ b(z,t) - \varepsilon\overline{b(t,z)} &= (u - \varepsilon\overline{u})z\bar{t}\\ &= 2\frac{\Re(\overline{\alpha}u)}{\overline{\alpha}}z\bar{t}\\ &= \alpha z\bar{t},\end{aligned}$$

ce qui constitue (SQ). Les calculs menés précédemment montre bien alors dans ce dernier cas que le poids de $(\mathbb{C}, b, \mathrm{Id})$ est λ.

CNS des droites α-SQ isomorphes de type T1 : Si deux droites α-SQ sont isomorphes, elles sont de même poids, en vertu de la question **III-2-b**.

Traitons la réciproque. Commençons par remarquer que la relation d'être isomorphe est d'équivalence sur l'ensemble des espaces α-SQ de dimension 1.
Le poids étant invariant sur chacune des classes, il suffit de montrer le résultat sur les droites α-semiquadratique $(\mathbb{C}, b, f)$, qui en sont des représentants.

Considérons donc $\mathcal{E} = (\mathbb{C}, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (\mathbb{C}, b', f')$ des espaces α-SQ de type T1 de même poids. Il existe $(\mu, \mu') \in \mathbb{C}^{*2}$ tel que sur $\mathbb{C}$ l'on ait $f(z) = \mu z$ et $f'(z) = \mu' z$.

On vérifie alors que $(\mathbb{C}, |\mu|^{-2}b,\ \mathrm{Id})$ et $(\mathbb{C}, |\mu'|^{-2}b',\ \mathrm{Id})$ sont des espaces α-SQ de poids égal à celui de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ respectivement, donc de même poids.

Le résultat établi dans la question précédente fournit $|\mu|^{-2}b = |\mu'|^{-2}b'$.

L'homothétie φ de rapport $\mu\mu'^{-1}$ réalise alors un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

5-a $\Re(b(x,x)/\alpha) = (1/2)$: La relation (SQ) donne

$$b(x,x) - \varepsilon\overline{b(x,x)} = \alpha \quad \text{soit} \quad \overline{\alpha}b(x,x) + \alpha\overline{b(x,x)} = |\alpha|^2$$

c'est-à-dire $\Re(b(x,x)/\alpha) = (1/2)$.

5-b Existence de x : f est non nulle donc il existe $y \in E$ tel que $f(y) = 1$.
D'après ce qui précède, on peut trouver ϱ réel tel que $b(y,y)/\alpha = (1/2) + i\varrho$.
On peut écrire $b(y,e) = f(y) = 1$, puis d'après les hypothèses $b(e,e) = f(e) = 0$.
Enfin (SQ) fournit $b(e,y) = \varepsilon$. On vérifie alors que le vecteur

$$x = y + i\frac{\overline{\alpha}\varrho}{2}e$$

vérifie les propriétés requises.

Notons au passage que $f(x) = 1$ et $f(e) = 0$ donc (x,e) constitue une base du plan E.

5-c Deux tels espaces sont isomorphes : Considérons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux plans α-SQ de type T1 et de poids 1.

Associons leur les bases $\mathcal{B} = (x,e)$ et $\mathcal{B}' = (x',e')$ vues précédemment.
Alors l'application linéaire qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

6 Existence du produit orthogonal : La fonction

$$f''(x,x') = f(x) + f'(x')$$

est clairement une forme linéaire sur E''. Elle répond donc à la question.

Par ailleurs si b'' existe, elle vérifie sur E''

$$\begin{aligned} b''((x,x'),(y,y')) &= b''((x,0),(y,0)) + b''((x,0),(0,y')) \\ &\quad + b''((0,x'),(y,0)) + b''((0,x'),(0,y')) \\ &= b(x,y) + b'(x',y') + b''((0,x'),(y,0)). \end{aligned}$$

La condition (SQ) fournit alors sur E''

$$b''((0,x'),(y,0)) - \varepsilon\overline{b''((y,0),(0,x'))} = \alpha f''(0,x')\overline{f''(y,0)}$$

c'est-à-dire

$$b''((0,x'),(y,0)) = \alpha f'(x')\overline{f(y)}$$

et donc

$$b''((x,x'),(y,y')) = b(x,y) + b'(x',y') + \alpha f'(x')\overline{f(y)}.$$

Réciproquement cette application est une forme sesquilinéaire sur E'' qui convient, d'où le résultat.

7 $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^{\perp}$ et $\mathcal{F} \times {}^{\perp}\mathcal{F}$: b est non dégénérée sur F.

Les relations

$$F = {}^{\perp}(F^{\perp}) = ({}^{\perp}F)^{\perp}$$

assure qu'elle est non dégénérée sur ses orthogonaux à droite et à gauche.

Il est facile de voir alors par restriction que $\mathcal{F}, \mathcal{F}^\perp$ et ${}^\perp\mathcal{F}$ sont α-SQ.

En outre, on a $E = F \oplus F^\perp$. Cela permet de déduire que

$$\varphi : (x_F, x_{F^\perp}) \mapsto x_F + x_{F^\perp}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}^\perp$ sur $\mathcal{E}$.

On établit de même que $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{F} \times {}^\perp\mathcal{F}$.

Ajoutons en outre une propriété qui nous servira par la suite.
Si $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont isomorphes, alors $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ et $\mathcal{E}' \times \mathcal{F}'$ sont isomorphes.
En effet, si $\mathcal{E} \overset{\varphi}{\mapsto} \mathcal{E}'$ et $\mathcal{F} \overset{\phi}{\mapsto} \mathcal{F}'$ sont des isomorphismes, l'application

$$(x, y) \mapsto (\varphi(x), \phi(x))$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}' \times \mathcal{F}'$.

8 $\mathcal{E}''$ a pour poids $\lambda\lambda'$: On vérifie que le vecteur centre est $e'' = (e, \lambda e')$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\frac{1-\lambda''}{\overline{\alpha}} &= f''(e'') \\ &= f(e) + f'(\lambda e') \\ &= \frac{1-\lambda}{\overline{\alpha}} + \lambda\frac{1-\lambda'}{\overline{\alpha}} \\ &= \frac{1-\lambda\lambda'}{\overline{\alpha}}\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

9 b non dégénérée sur $F \iff (\lambda \neq 1)$ ou ($\mathcal{E}$ de type T0) : b est non dégénérée sur $F = {}^\perp(\mathbb{C}e)$ si et seulement si

$${}^\perp(\mathbb{C}e) \cap \mathbb{C}e = \{0\}.$$

Ou bien $e = 0$ et alors $\mathcal{E}$ est de type T0, sinon cette condition équivaut à $b(e, e) \neq 0$ c'est-à-dire $\lambda \neq 1$, d'où le résultat annoncé.

$i\overline{\alpha}b$ est symétrique sur F : f étant nulle sur F, on obtient en utilisant (SQ) :

$$\forall\, (x, y) \in F^2,\ b(x, y) = \varepsilon\overline{b(y, x)}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, (x, y) \in F^2,\ i\overline{\alpha}b(x, y) = \overline{i\overline{\alpha}b(y, x)}$$

d'où le résultat.

10 $ps(\mathcal{E} \times \mathcal{E}') = ps(\mathcal{E}) + ps(\mathcal{E}')$: Considérons $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(e'_1, \cdots, e'_p)$ des bases semi-orthonormées respectives de $(E, i\overline{\alpha}b)$ et $(E', i\overline{\alpha}b')$.
L'une des formes linéaires f ou f' étant nulle, la famille

$$((e_1, 0), \cdots, (e_n, 0), (0, e'_1), \cdots, (0, e'_p))$$

constitue une base semi-orthonormée de (E'', b'').

On en déduit

$$\begin{aligned} ps(\mathcal{E}\times\mathcal{E}') &= i\overline{\alpha}b''((e_1,0),(e_1,0))+\cdots+i\overline{\alpha}b''((e_n,0),(e_n,0)) \\ &\quad + i\overline{\alpha}b''((0,e'_1),(0,e'_1))+\cdots+i\overline{\alpha}b''((0,e'_p),(0,e'_p))) \\ &= i\overline{\alpha}b(e_1,e_1)+\cdots+i\overline{\alpha}b(e_n,e_n)+i\overline{\alpha}b'(e'_1,e'_1)+\cdots+i\overline{\alpha}b'(e'_p,e'_p)) \\ &= ps(\mathcal{E})+ps(\mathcal{E}') \end{aligned}$$

d'où la relation souhaitée.

11-a Étude des restrictions : On a déjà

$$E_1\cap E_1^{\perp} = {}^{\perp}E_2\cap E_2 = E_1\cap E_2=\{0\}.$$

On en déduit que b est non dégénérée sur E_1 et E_2.

En outre, f n'est pas nulle sur E_1 et E_2. Donc par restriction, (E_1,b,f) et (E_2,b,f) sont des espaces α-SQ de type T1.

11-b $(F_1\oplus F_2)^{\perp}=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2$: Commençons par noter que les sommes directes proposées résultent de $F_1\times F_2\subset E_1\times E_2$ et $(e_1,e_2)\in E_1\times E_2$.

F est un hyperplan de E ne contenant pas E_1 et E_2. Les vecteurs e_1 et e_2 sont alors non nuls et par suite linéairement indépendants puis F_1 et F_2 sont des hyperplans respectifs de E_1 et E_2. On a donc $\dim(F_1\oplus F_2)=\dim E-2$ et par suite $(F_1\oplus F_2)^{\perp}$ est un plan car b est non dégénérée sur E.

Remarquons en outre que :

$$\forall\, x\in F_1,\ b(x,e_1)=f(x)=0$$

puis en utilisant (SQ) :

$$\forall\, x\in F_2,\ b(x,e_1)=\varepsilon\overline{b(e_1,x)}=0,$$

la dernière égalité résultant de $F_2\subset E_1^{\perp}$. On en déduit $e_1\in(F_1\oplus F_2)^{\perp}$.

On vérifie facilement $e_2\in(F_1\oplus F_2)^{\perp}$ puis l'égalité annoncée.

En particulier si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont de poids 1, e_1 et e_2 sont dans F et donc

$$F\cap(F_1\oplus F_2)^{\perp}=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2.$$

Sinon e_1 ou e_2 n'est pas dans F et cette intersection est réduite à une droite. Dans ce dernier cas, $f(e_2)e_1-f(e_1)e_2$ en est un vecteur directeur c'est-à-dire

$$F\cap(F_1\oplus F_2)^{\perp}=\mathbb{C}(f(e_2)e_1-f(e_1)e_2).$$

11-c Valeur de $ps(\mathcal{E})-ps(\mathcal{E}_1)-ps(\mathcal{E}_2)$: $F_1\oplus F_2$ étant un sous-espace vectoriel de F, on a

$$\begin{aligned} ps(\mathcal{E}) &= \sigma(F,i\overline{\alpha}b) \\ &= \sigma(F_1\oplus F_2,i\overline{\alpha}b)+\sigma(F\cap(F_1\oplus F_2)^{\perp},i\overline{\alpha}b) \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la question **I-8**. D'après les hypothèses, F_1 et F_2 sont orthogonaux dans $(F, i\overline{\alpha}b)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\sigma(F_1 \oplus F_2, i\overline{\alpha}b) &= \sigma(F_1, i\overline{\alpha}b) + \sigma(F_2, i\overline{\alpha}b)\\ &= ps(\mathcal{E}_1) + ps(\mathcal{E}_2).\end{aligned}$$

Donc on a la relation

$$ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) = \sigma(F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}, i\overline{\alpha}b).$$

Par ailleurs, $E_1^{\perp} = E_2$ donc d'après **III-7**, $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$.
Les questions **III-2-b** et **III-8** fournissent alors $\lambda = \lambda_1\lambda_2$.
Si $F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$, on peut écrire

$$i\overline{\alpha}b(e_1, e_1) = i\overline{\alpha}f(e_1) = 0,\ b(e_2, e_2) = i\overline{\alpha}f(e_2) = 0 \ \text{ et } \ i\overline{\alpha}b(e_1, e_2) = 0$$

d'où b est nulle sur $F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp}$. On en déduit

$$\begin{aligned}ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) &= 0\\ &= \Im\lambda_1 + \Im\lambda_2 - \Im\lambda\end{aligned}$$

puisque dans ce cas $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
Traitons le cas $F \cap (F_1 \oplus F_2)^{\perp} = \mathbb{C}\zeta$ où l'on a posé $\zeta = f(e_2)e_1 - f(e_1)e_2$.
La valeur de $\sigma(\mathbb{C}\zeta, i\overline{\alpha}b)$ dépend du signe de $i\overline{\alpha}b(\zeta, \zeta)$.
Posons $\theta_1 = \text{Arg } \lambda_1$ et $\theta_2 = \text{Arg } \lambda_2$ de telle façon à avoir $\lambda = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
La relation (SQ) fournit

$$b(e_2, e_1) = \alpha f(e_2)\overline{f(e_1)},$$

d'où, par développement on obtient

$$\begin{aligned}b(\zeta, \zeta) &= |f(e_2)|^2 b(e_1, e_1) - f(e_1)\overline{f(e_2)}b(e_2, e_1) + |f(e_1)|^2 b(e_2, e_2)\\ &= |f(e_2)|^2 f(e_1) - \alpha|f(e_1)|^2|f(e_2)|^2 + |f(e_1)|^2 f(e_2)\\ &= f(e_1)f(e_2)(\overline{f(e_1)} + \overline{f(e_2)} - \alpha\overline{f(e_1)f(e_2)}).\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}i\overline{\alpha}b(\zeta, \zeta) &= \frac{i}{|\alpha|^2}(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \overline{\lambda})\\ &= \frac{8}{|\alpha|^2}\ \sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\\ &= \frac{2}{|\alpha|^2}(\Im\lambda_1 + \Im\lambda_2 - \Im\lambda).\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre $ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2)$ vaut $1, 0, -1$ suivant que $\Im\lambda_1 + \Im\lambda_2 - \Im\lambda$ est > 0, nul ou < 0.

12 $\boldsymbol{\lambda = 1}$ ssi $\boldsymbol{\sigma - n}$ est pair : Supposons $\lambda = 1$ de telle sorte que $\sigma = s$.
Alors $b(e, e) = f(e) = 0$, d'où on en déduit à l'aide de **III-3** que $\mathbb{C}e$ est l'orthogonal de $\text{Ker}f$ dans $(\text{Ker}f, i\overline{\alpha}b)$.
D'après **I-6-a**, il existe une base semi-orthonormée $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de $\text{Ker}f$ telle que

$e_1 = e$. Les vecteurs $e_2, \cdots, e_{n-1}$ n'étant pas orthogonaux à Ker$f$, ne sont donc pas isotropes. Il en résulte

$$\begin{aligned} s &\equiv i\overline{\alpha}b(e_1, e_1) + i\overline{\alpha}b(e_2, e_2) + \cdots + i\overline{\alpha}b(e_{n-1}, e_{n-1}) \\ &\equiv 0 + 1 + \cdots + 1 \\ &\equiv n \pmod 2 \end{aligned}$$

c'est à dire $\sigma - n = s - n$ est pair.

Supposons $\lambda \neq 1$ de telle sorte que

$$\sigma = s + 1 - \frac{\text{Arg } \lambda}{\pi}.$$

D'après **III-9**, $i\overline{\alpha}b$ est non dégénérée sur Ker$f$ et donc les vecteurs d'une base semi-orthonormée $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ de $(\text{Ker}f, i\overline{\alpha}b)$ sont non isotropes. Il en résulte

$$\begin{aligned} s &\equiv i\overline{\alpha}b(e_1, e_1) + i\overline{\alpha}b(e_2, e_2) + \cdots + i\overline{\alpha}b(e_{n-1}, e_{n-1}) \\ &\equiv n - 1 \pmod 2. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} e^{i(n-\sigma)\pi} &= e^{i(n-s-1)\pi}\lambda \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Par suite $e^{i(n-\sigma)\pi} \neq 1$, c'est-à-dire on a $\sigma - n \notin 2\mathbb{Z}$ et l'équivalence annoncée.

On en déduit dans tous les cas

$$\lambda = e^{i(n-\sigma)\pi}.$$

Donc si $\sigma - n \in 2\mathbb{Z}$, on a $s = \sigma$.

Sinon, en remarquant que pour tout x réel,

$$\text{Arg } e^{ix} = x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right],$$

on obtient

$$\begin{aligned} s &= \sigma - 1 + \frac{\text{Arg } e^{i\pi(n-\sigma)}}{\pi} \\ &= n - 1 - 2\left[\frac{n-\sigma}{2}\right] \\ &= n + 1 + 2\left[\frac{\sigma - n}{2}\right], \end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu car $\dfrac{n-\sigma}{2}$ n'est pas entier.

13 $\boldsymbol{\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}_1) + \sigma(\mathcal{E}_2)}$ **:** Traitons le cas $k = 1$.

Si $\beta\gamma \neq 0$, alors on a $0 < \beta + \gamma < 2\pi$ d'où

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{E}) &= ps(\mathcal{E}) + 1 - \frac{\beta + \gamma}{\pi}, \\ \sigma(\mathcal{E}_1) &= ps(\mathcal{E}_1) + 1 - \frac{\beta}{\pi}, \\ \sigma(\mathcal{E}_2) &= ps(\mathcal{E}_2) + 1 - \frac{\gamma}{\pi} \end{aligned}$$

et

$$\Im\lambda_1 + \Im\lambda_2 - \Im\lambda = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} > 0.$$

On en déduit

$$\sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) = ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) - 1 = 0.$$

Si $\beta\gamma = 0$, on a

$$\sigma(\mathcal{E}) - \sigma(\mathcal{E}_1) - \sigma(\mathcal{E}_2) = ps(\mathcal{E}) - ps(\mathcal{E}_1) - ps(\mathcal{E}_2) = 0.$$

Ceci établit la relation annoncée dans ce premier cas.
Les cas $k = 0$ et $k = 1$ se traitent de manière analogue.

Signature d'un produit orthogonal : Soient des espaces α-semiquadratiques $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ et $\mathcal{E}'' = (E'', b'', f'')$ puis leur produit orthogonal $\mathcal{E}$.
Supposons $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ de type T1. Alors

$$E_1 = E' \times \{0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{0\} \times E''$$

sont des sous espaces vectoriels de $E = E' \times E''$ vérifiant les hypothèses de la question **III-11**. D'après ce qui précède, on a $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}_1) + \sigma(\mathcal{E}_2)$.
En outre, la première projection de E_1 et la seconde projection de E_2 constituent respectivement des isomorphismes de $\mathcal{E}_1$ sur $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}_2$ sur $\mathcal{E}''$.
Il en résulte $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}') + \sigma(\mathcal{E}'')$ dans ce premier cas.
Supposons $\mathcal{E}'$ ou $\mathcal{E}''$ de type T0. D'après la question **III-10**, on a

$$ps(\mathcal{E}) = ps(\mathcal{E}') + ps(\mathcal{E}'')$$

ce qui fournit directement $\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}') + \sigma(\mathcal{E}'')$.

14 Exemple de droite $\boldsymbol{\alpha}$-SQ de signature $\boldsymbol{\sigma}$: Si $\sigma = \pm 1$, on prend les droites α-SQ de type T0 respectives $(\mathbb{C}, \pm b, 0)$, où l'on a posé sur $\mathbb{C}$

$$b(z,t) = -i\alpha z\bar{t}.$$

Sinon on prend la droite α-SQ introduite en **III-4**, associée au poids $\lambda = -e^{-i\pi\sigma}$.

Étude de la CNS proposée : Montrons que la condition est nécessaire.
Considérons $\mathcal{E}$ un espace α-SQ de dimension n.
Si $\lambda = 1$, on a

$$|\sigma| = |s| \leqslant \dim \operatorname{Ker} f \leqslant n.$$

Sinon $\mathcal{E}$ est de type T1 et par suite $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan. Comme on a

$$0 \leqslant \frac{\operatorname{Arg}\lambda}{\pi} \leqslant 2,$$

on déduit de l'expression de σ l'encadrement

$$s - 1 \leqslant \sigma \leqslant s + 1$$

puis

$$- \dim \mathrm{Ker} f - 1 \leqslant \sigma \leqslant \dim \mathrm{Ker} f + 1,$$

et donc $|\sigma| \leqslant n$, d'où ce premier point.

Montrons que la condition est suffisante. Supposons $|\sigma| \leqslant n$.
Si $n = 0$, l'espace nul répond à la question. Sinon d'après la question précédente, il existe $\mathcal{F}$ une droite α-SQ de signature σ/n.
Considérons alors $\mathcal{E} = \mathcal{F}^n$, où le membre de droite est défini par la récurrence :

$$\forall\, 1 \leqslant p < n, \quad \begin{cases} \mathcal{F}^1 = \mathcal{F} \\ \mathcal{F}^{p+1} = \mathcal{F}^p \times \mathcal{F} \end{cases} .$$

D'après la question **III-13**, on a $\sigma(\mathcal{E}) = n\sigma(\mathcal{F}) = \sigma$, d'où le résultat annoncé.

15 Étude de la CNS d'isomorphie : Montrons que la condition est nécessaire.
Considérons $\mathcal{E} = (E, b, f)$ et $\mathcal{E}' = (E', b', f')$ des espaces α-SQ puis φ un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.
Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même dimension et il a déjà été vu qu'ils avaient même poids.
φ réalise une bijection de $\mathrm{Ker} f$ sur $\mathrm{Ker} f'$, ce qui assure que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont même type.
Enfin les hypothèses sur φ permettent de vérifier qu'ils ont même pseudo-signature.

La combinaison de ces propriétés assurent qu'ils ont même signature, d'où ce premier point.

Montrons que la condition est suffisante.
On va établir par récurrence sur l'entier n que deux espaces α-SQ de dimension n, de même type et même signature sont isomorphes.

Pour $n = 0$ le résultat est clair.

Traitons le cas $n = 1$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux droites α-SQ de même type et même signature. Ce qui précède assure comme en **III-4** que l'on ne restreint pas la généralité en supposant $E = E' = \mathbb{C}$.
Alors les relations vues en **III-12** assurent que ces espaces ont même poids.
S'ils sont de type T1, le résultat est une conséquence de la question **III-4**.
S'ils sont de type T0, on vérifie que les formes bilinéaires associées sont de la forme

$$(z, t) \mapsto -i\alpha\rho z\bar{t},$$

où ρ est un réel du même signe que la signature. Il existe alors un réel non nul μ tel que $b = \mu^2 b'$. L'homothétie de rapport μ réalise donc un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$, d'où le résultat dans ce cas.

Supposons le résultat acquis jusqu'à $n - 1 \geqslant 1$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux espaces α-SQ de dimension n, de même type et même signature.
Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ont un même poids λ.

Traitons le cas $\lambda \neq 1$. Les restrictions de b à $\mathbb{C}e$ et de b' à $\mathbb{C}e'$ sont non dégénérées.
Donc les espaces $\mathcal{F} = (\mathbb{C}e, b, f)$ et $\mathcal{F}' = (\mathbb{C}e', b', f')$ sont des droites α-SQ de type T1 et de même poids, d'où ils sont isomorphes.
Les espaces ${}^{\perp}\mathcal{F}$ et ${}^{\perp}\mathcal{F}'$ sont des espaces α-SQ de dimension $n - 1$ et de type T0.
D'après **III-7**, les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F} \times {}^{\perp}\mathcal{F}$ puis $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}' \times {}^{\perp}\mathcal{F}'$ sont isomorphes.
Les égalités

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}') = \sigma(\mathcal{F}) + \sigma({}^{\perp}\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}') + \sigma({}^{\perp}\mathcal{F}')$$

permettent de déduire que ${}^{\perp}\mathcal{F}$ et ${}^{\perp}\mathcal{F}'$ ont même signature.
Ces espaces vérifient l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et donc sont isomorphes.
Ainsi $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont isomorphes comme produit orthogonal d'espaces isomorphes.

Traitons le cas $\lambda = 1$ et supposons les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de type T0.
Les hypothèses permettent d'écrire

$$\sigma(E, i\overline{\alpha}b) = \sigma(E', i\overline{\alpha}b').$$

Considérons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases semi-orthonormées respectives de $(E, i\overline{\alpha}b)$ et $(E', i\overline{\alpha}b')$. Les formes bilinéaires associées sont non dégénérées donc on peut écrire, en gardant les notations de la question **I-4**,

$$\begin{cases} \dim\, E_+ + \dim\, E_- = \dim\, E'_+ + \dim\, E'_- = n \\ \dim\, E_+ - \dim\, E_- = \dim\, E'_+ - \dim\, E'_- \end{cases}.$$

ce qui fournit les relations

$$\dim\, E_+ = \dim\, E'_+ \quad \text{et} \quad \dim\, E_- = \dim\, E'_-.$$

Ainsi $i\overline{\alpha}b$ et $i\overline{\alpha}b'$ ont même *signature* au sens usuel. Il existe donc un isomorphisme φ de E sur E' tel que :

$$\forall\, (x, y) \in E^2, \quad b'(\varphi(x), \varphi(y)) = b(x, y).$$

Cette application constitue un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$.

Traitons le cas $\lambda = 1$ et supposons les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de type T1.
L'entier n étant supérieur 2, on peut introduire F et F', des plans construits suivant la méthode de la question **III-5**. D'après cette même question, les plans α-SQ qui leur sont associés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont isomorphes et vérifie les hypothèses de la question **III-7**. On peut alors achever comme dans le cas $\lambda \neq 1$.

En résumé, le résultat est vérifié au rang n donc il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV — Le cas des corps finis

1 $f(e) = b(e, e) = 1$: C'est une conséquence de la définition.

Droites (SQ) de poids -1 : Ce sont, à un isomorphisme près, les droites $\mathcal{E}(\mu) = (\mathbb{F}_p, \mu^2 b, \mu Id_{\mathbb{F}_p})$, pour $\mu \in \mathbb{F}_p^*$, où l'on a posé $b(x, y) = xy$ sur $\mathbb{F}_p$. L'homothétie de rapport μ constitue un isomorphisme de $\mathcal{E}(\mu)$ dans $\mathcal{E}(1)$, pour tout $\mu \in \mathbb{F}_p^*$.

2 Existence et unicité de b : Traitons l'unicité sous réserve d'existence.

Si b existe, elle est entièrement déterminée par la donnée de son action sur la base canonique.
Il suffit de contrôler que $b(e_i, e_j)$ est déterminé de manière unique, pour $i > j$.
La relation (SQ) donne, pour $i > j$

$$b(e_i, e_j) = 2f(e_i)f(e_j) - b(e_j, e_i) = 2,$$

d'où ce premier point.

Réciproquement la forme bilinéaire précédente vérifie les propriétés requises, ce qui établit l'existence et assure le résultat.

3 $\mathcal{E}_{n+m}$ et $\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_m$ sont isomorphes : On vérifie, au prix d'une petite discussion, que l'application $i_{m,n} : E_n \times E_m \longrightarrow E_{n+m}$

$$((x_1, \cdots, x_n), (x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$$

réalise un isomorphisme de $\mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_m$ sur $\mathcal{E}_{n+m}$.

Morphisme de $G_n \times G_m$ dans G_{n+m} : Considérons pour (g, g') dans $G_n \times G_m$, l'application $g \times g'$ définie sur E_{n+m} par

$$(g \times g')(x) = i_{n,m}(g(x_1, \cdots, x_n), g'(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})).$$

On vérifie que cette application constitue un automorphisme de $\mathcal{E}_{n+m}$ puis que pour $(h, h') \in G_n \times G_m$, on a

$$(gh) \times (g'h') = (g \times g')(h \times h').$$

Donc $(g, g') \mapsto g \times g'$ réalise un morphisme de groupes de $G_n \times G_m$ dans G_{n+m}. Avec des notations évidentes on peut écrire, pour $i \leqslant n + m$

$$(g \times g')(e_i) = \begin{cases} i_{n,m}(g(e_i), 0) & \text{si } i \leqslant n \\ i_{n,m}(0, g'(e_{i-n})) & \text{sinon} \end{cases}.$$

$(g \times g') \times g'' = g \times (g' \times g'')$: On vérifie, pour tout $x \in E_{n+m+q}$

$$((g \times g') \times g'')(x) = (g \times (g' \times g''))(x) = y \in E_{n+m+q}$$

avec

$$(y_1, \cdots, y_n) = g(x_1, \cdots, x_n), (y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}) = g'(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$$

et

$$(y_{n+m+1}, \cdots, y_{n+m+q}) = g''(x_{n+m+1}, \cdots, x_{n+m+q}).$$

4 Vecteur centre de $\mathcal{E}_n$: Le vecteur centre e vérifie $b(e_i, e) = 1$, pour tout $i \leqslant n$. Ses composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ vérifient donc le système

$$\begin{cases} x_1 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2x_1 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n & = 1 \end{cases}.$$

On trouve $e = ((-1)^{i-1})_{i \leqslant n}$.

5 Détermination de τ : Traitons l'unicité sous réserve d'existence.

Si τ existe, il est entièrement déterminé par la donnée de son action sur la base canonique. Il suffit de contrôler que $\tau(e_2)$ est déterminé de manière unique.
Posons alors $\tau(e_2) = xe_1 + ye_2$. Les conditions

$$f(\tau(e_2)) = 1, b(\tau(e_2), \tau(e_2)) = 1, b(\tau(e_1), \tau(e_2)) = 0 \text{ et } b(\tau(e_2), \tau(e_1)) = 2$$

conduisent au système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^2 = 1 \\ 2x + y = 0 \\ y = 2 \end{cases},$$

c'est-à-dire $\tau(e_2) = -e_1 + 2e_2$, d'où ce premier point.

Réciproquement, l'automorphisme τ précédent vérifie les propriétés requises, ce qui établit l'existence et assure le résultat.

6 $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ pour $|i-j| > 1$: Posons

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice canoniquement associée à τ_q est diagonale par blocs

$$A_q = \begin{pmatrix} I_{q-1} & & \\ & T & \\ & & I_{n-q-1} \end{pmatrix}.$$

On peut supposer $i < j$ pour se fixer les idées. On a alors

$$A_i A_j = A_j A_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & \\ & T & & & \\ & & I_{j-i-2} & & \\ & & & T & \\ & & & & I_{n-j-1} \end{pmatrix},$$

d'où le résultat annoncé.

$\tau_i \tau_j \tau_i = \tau_j \tau_i \tau_j$ pour $|i-j| = 1$: Supposons $j = i+1$ pour se fixer les idées. En remarquant que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= M, \end{aligned}$$

on vérifie la relation

$$A_i A_j A_i = A_j A_i A_j = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & \\ & M & \\ & & I_{n-i-2} \end{pmatrix},$$

d'où le résultat annoncé.

7-a $|\Gamma_2| = p$: Γ_2 est le groupe monogène engendré par τ.
On vérifie, pour tout $q \in \mathbb{Z}$

$$T^q = \begin{pmatrix} 1-q & -q \\ q & 1+q \end{pmatrix}$$

d'où le groupe engendré par T est

$$gr(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1-q & -q \\ q & 1+q \end{pmatrix} ; 0 \leqslant q \leqslant p-1 \right\}.$$

Donc Γ_2 est d'ordre p.

7-b Vecteur fixe sous l'action de Γ_2 : $x \in E_2$ est fixe sous l'action de $\Gamma_2 = gr(\tau)$ si et seulement si $\tau(x) = x$, c'est-à-dire si et seulement si

$$x \in \mathrm{Ker}(\tau - \mathrm{I}_2) = \mathbb{F}_p e,$$

d'où le résultat.

7-c Orbites sous l'action de Γ_2 : Le stabilisateur d'un élément $x \in E_2$ est un sous-groupe de Γ_2, qui est de cardinal p. C'est donc ou bien le groupe trivial, ou bien Γ_2. Dans le premier cas, l'orbite de x est de cardinal p. Le second cas correspond à $x \in \mathbb{F}_p e$ d'après la question précédente.

Remarquons en outre que deux vecteurs liés et distincts, non contenus dans $\mathbb{F}_p e$, ne sont pas dans la même orbite car 1 est l'unique valeur propre des éléments de Γ_2. On en déduit alors que les orbites sont

$$\{0\}, \{e\}, \{2e\}, \cdots, \{(p-1)e\}, \Gamma_2 e_1, \Gamma_2(2e_1), \cdots, \Gamma_2((p-1)e_1),$$

avec, pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$

$$\Gamma_2(ke_1) = \{k(1-q)e_1 + kqe_2\ ; 0 \leqslant q \leqslant p-1\}.$$

Orbites sous l'action de G_2 : $\Gamma_2 \subset G_2$ donc ces orbites sont des réunions d'orbites sous l'action de Γ_2.
Considérons g un élément de G_2, x un vecteur de E_2 et $x' = g^{-1}(x)$.
Alors on a successivement

$$\begin{aligned} b(x, g(e)) &= b(x', e) \\ &= f(x') \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Il en résulte $g(e) = e$ et que chaque élément de $\mathbb{F}_p e$ présente sous l'action de G_2 une orbite triviale.
En outre, 1 est l'unique valeur propre de g dans $\mathbb{F}_p$.
En effet, considérons $\mu \in \mathrm{Sp}(g)$ et x un vecteur propre associé. Alors la relation $g(x) = \mu x$ fournit

$$f(g(x)) = f(x) = \mu f(x)$$

Si $\mu = 1$, le résultat est acquis. Sinon $f(x) = 0$ et par suite $x \in \mathbb{F}_p^* e$ ce qui conduit à $\mu = 1$, d'où ce dernier point.

En utilisant la remarque de la question précédente, on en déduit que les orbites sous l'action de G_2 sont les orbites sous l'action de Γ_2.

7-d $\Gamma_2 = G_2$: Fixons g dans G_2.
D'après l'étude qui précède, l'orbite de e_1 sous l'action de G_2 est $\Gamma_2(e_1)$.
Il existe donc $q \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $g(e_1) = \tau^q(e_1)$ ou encore $\tau^{-q}g(e_1) = e_1$.
(e_1, e) formant une base de E_2 et $\tau^{-q}g(e) = e$, il vient $\tau^{-q}g = \mathrm{I}_2$, c'est-à-dire

$$g = \tau^q \in \Gamma_2.$$

8 Existence de γ : On raisonne par récurrence sur $n > 1$.

Traitons le cas $n = 2$. Considérons $x \in E_2$ qui n'est pas dans $\mathbb{F}_p e$.
D'après la question **IV-7-c**, l'orbite de x s'écrit $\Gamma_2(ke_1)$, où k est un scalaire de $\mathbb{F}_p^*$. Il existe alors $\gamma \in \Gamma_2$ tel que $\gamma(x) = ke_1$. Comme

$$f(x) = f(\gamma(x)) = kf(e_1) = k,$$

γ vérifie les propriétés requises, d'où le résultat.

Supposons le vérifié jusqu'au rang $n-1 > 1$. Soit $x \in E_n$ qui n'est pas dans $\mathbb{F}_p e$.

1. Traitons le cas $f(x) \neq 0$. On ne restreint pas la généralité en supposant $f(x) = 1$.

   (a) Étudions le cas où $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ n'est pas colinéaire au vecteur centre de E_{n-1}.

   i. Si $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$, alors $x_n = 1$ et $n > 3$ car $(1, -1)$ est le vecteur centre de E_2. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $g_1 \in \Gamma_{n-1}$ tel que

   $$g_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) = e_1 - e_2.$$

   On vérifie facilement alors que $g_1 \times \mathrm{l}_1$ est un élément de Γ_n qui vérifie

   $$(g_1 \times \mathrm{l}_1)(x) = e_1 - e_2 + e_n.$$

   On a de même successivement

   $$x \overset{g_1 \times \mathrm{l}_1}{\mapsto} (e_1 - e_2 + e_n) \overset{\mathrm{l}_1 \times g_2}{\mapsto} (e_1 + e_2 - e_3) \overset{g_3 \times \mathrm{l}_{n-2}}{\mapsto} (2e_1 - e_3)$$

   $$(2e_1 - e_3) \overset{\mathrm{l}_1 \times g_4}{\mapsto} (2e_1 - e_2) \overset{g_5 \times \mathrm{l}_{n-2}}{\mapsto} e_1$$

   où g_2, g_4 et g_4, g_5 sont des éléments respectifs de Γ_{n-1} et Γ_2 vérifiant

   $$\begin{aligned} g_2(-e_1 + e_{n-1}) &= e_1 - e_2 \\ g_3(e_1 + e_2) &= 2e_1 \\ g_4(e_2) &= e_1 \\ g_5(2e_1 - e_2) &= e_1 \end{aligned}$$

   dont l'existence est assuré par l'hypothèse de récurrence, puisque $n > 3$.

   ii. Si $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 1 - x_n \neq 0$, on procède suivant les transformations

   $$x \overset{g_1 \times \mathrm{l}_1}{\mapsto} ((1 - x_n)e_1 + x_n e_n) \overset{\mathrm{l}_1 \times g_2}{\mapsto} ((1 - x_n)e_1 + x_n e_2) \overset{g_3 \times \mathrm{l}_{n-2}}{\mapsto} e_1$$

   où g_1, g_2 et g_3 sont des éléments respectifs de Γ_{n-1} et Γ_2 vérifiant

   $$\begin{aligned} g_1(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1}) &= (1 - x_n)e_1 \\ g_2(e_{n-1}) &= e_1 \\ g_3((1 - x_n)e_1 + x_n e_2) &= e_1 \end{aligned}$$

   dont l'existence est assuré par l'hypothèse de récurrence, puisque $n \geqslant 3$.

(b) Si $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est colinéaire au vecteur centre de E_{n-1}, on se ramène au cas précédent en travaillant sur $x' = (\mathrm{l}_{n-2} \times \tau)(x)$.

2. Traitons le cas $f(x) = 0$.

(a) Étudions le cas où $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ n'est pas colinéaire au vecteur centre de E_{n-1}.

i. Si $x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0$, alors $x_n = 0$. On peut écrire $(g_1 \times \mathrm{l}_1)(x) = e_1 - e_2$ où g_1 est un élément de Γ_{n-1} vérifiant

$$g_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) = e_1 - e_2$$

dont l'existence est assuré par l'hypothèse de récurrence, puisqu'alors, dans ce cas $n > 3$.

ii. Si $x_1 + \cdots + x_{n-1} = -x_n \neq 0$, on fait agir les transformations

$$x \overset{g_1 \times \mathrm{l}_1}{\longmapsto} (-x_n e_1 + x_n e_n) \overset{\mathrm{l}_2 \times g_2}{\longmapsto} (-x_n e_1 + x_n e_3)$$

où g_1 et g_2 sont des éléments respectifs de Γ_{n-1} et Γ_{n-2} vérifiant

$$g_1(x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1}) = -x_n e_1$$
$$g_2(e_{n-2}) = e_1$$

dont l'existence est assuré par l'hypothèse de récurrence, puisque $n \geqslant 3$. Considérons alors $q \in \mathbb{Z}$ tel que $-x_n(1-q) = 1$.
L'étude menée sur τ a dégagé la relation

$$\tau^q(e_1) = (1-q)e_1 + q e_2.$$

On en déduit

$$(\tau^q \times \mathrm{l}_{n-2})(-x_n e_1 + x_n e_3) = e_1 - (1 + x_n)e_2 + x_n e_3$$

puis on utilise la transformation

$$(e_1 - (1 + x_n)e_2 + x_n e_3) \overset{\mathrm{l}_1 \times g_3}{\longmapsto} (e_1 - e_2)$$

où g_3 est l'élément de Γ_{n-1} vérifiant

$$g_3(-(1 + x_n)e_1 + x_n e_2) = -e_1$$

dont l'existence est assuré par l'hypothèse de récurrence, puisque $n \geqslant 3$.

(b) Si $(x_1, \cdots, x_{n-1})$ est colinéaire au vecteur centre de E_{n-1}, on se ramène au cas précédent en travaillant sur $x' = (\mathrm{l}_{n-2} \times \tau)(x)$.

Dans tous les cas, il existe γ dans Γ_n tel que $\gamma(x) = f(x)e_1$ si $f(x) \neq 0$ et à $e_1 - e_2$ sinon, d'où le résultat au rang n. Il est donc vrai pour tout $n \geqslant 2$.

9 $\boldsymbol{G_n = \Gamma_n}$: On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$, $G_1 = \Gamma_1 = \{\mathrm{l}_1\}$ donc le résultat est vrai.

Supposons le vrai au rang $n-1 \geqslant 1$. Fixons g dans G_n.
D'après l'étude précédente, $g(e_n)$ est dans l'orbite de e_n sous l'action de Γ_n. Il existe donc γ dans Γ_n tel que $h = \gamma g$ vérifie $h(e_n) = e_n$.
Considérons alors $i < n$ et posons $x = h(e_i)$. On a simultanément $b(x, e_n) = x_n$ et

$$b(x, e_n) = b(h(e_i), h(e_n)) = b(e_i, e_n) = 0,$$

c'est-à-dire $x_n = 0$. Ainsi h s'écrit $\widehat{h} \times \mathrm{l}_1$, où $\widehat{h}$ représente un automorphisme de G_{n-1}. D'après l'hypothèse de récurrence, $G_{n-1} = \Gamma_{n-1}$ donc $\widehat{h} \in \Gamma_{n-1}$ et par suite $h \in \Gamma_n$. On en déduit que $g = \gamma^{-1}h$ est un élément de Γ_n, ce qui fournit le résultat au rang n.

En conclusion, il est vrai pour tout $n > 0$.

$G_n = \Gamma_n$ agit transitivement sur Σ_n : Cela résulte immédiatement du fait que Σ_n est l'orbite de e_1 sous l'action de $G_n = \Gamma_n$.

Calcul de $|\Sigma_n|$: Traitons le cas n pair. On a donc $f(e) = 0$ et par suite Σ_n est précisément l'hyperplan affine $H = \{x \in E_n \,;\, f(x) = 1\}$.

Il en résulte

$$|\Sigma_n| = p^{n-1}.$$

Traitons le cas n impair. On a donc $f(e) = 1$ et par suite $\Sigma_n = H - \{e\}$.

Il en résulte

$$|\Sigma_n| = p^{n-1} - 1.$$

10 Stabilisateur de e_n : D'après le raisonnement mené pour la fonction h dans la question **IV-9**, le stabilisateur de e_n dans E_n est $H = G_{n-1} \times \mathrm{I}_1$.

Calcul de $|G_n|$: On peut écrire

$$|\Sigma_n| = |G_n(e_n)| = (G_n : H).$$

On en déduit

$$|G_n| = |\Sigma_n||G_{n-1}| = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} |\Sigma_i|.$$

11 $\equiv$ est d'équivalence : La transitivité seulement n'est pas immédiate.
Considérons $(x, y, z) \in \Sigma_3^3$ tel que $x \equiv y$ et $y \equiv z$. Raisonnons par l'absurde. Supposons $x \not\equiv z$ c'est-à-dire que $\mathcal{B} = (e, x, z)$ forme une base de E_3.
Posons alors $y = y_1 e + y_2 x + y_3 z$. Il vient successivement

$$\det_{\mathcal{B}}(e, x, y) = y_3 = 0 \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(e, y, z) = y_2 = 0.$$

Donc on a $y = y_1 e$ qui n'est pas un élément de Σ_3, d'où la contradiction.

Ainsi $x \equiv z$, ce qui assure la transitivité et le résultat.

Étude des classes : La classe c_x d'un élément x de Σ_3 est l'ensemble des éléments distincts de e de la droite affine passant par e et x. En particulier, $|c_x| = p - 1$ et le nombre de classe d'équivalence est donc

$$\frac{|\Sigma_3|}{p-1} = p + 1.$$

12 Détermination de φ : L'ensemble quotient $(\Sigma_3/\equiv)$ possède $p+1$ éléments. Les éléments de G_3 étant des automorphismes, conservent les bases de E_3. Il en résulte, pour tout x et y dans Σ_3 et g dans G_3

$$\begin{aligned} c_x \neq c_y &\Longleftrightarrow (e,x,y) \text{ est une base de } E_3 \\ &\Longleftrightarrow (e,g(x),g(y)) \text{ est une base de } E_3 \\ &\Longleftrightarrow c_{g(x)} \neq c_{g(y)} \\ &\Longleftrightarrow g(c_x) \neq g(c_y) \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant obtenue en remarquant que $c_{g(\eta)} = g(c_\eta)$, pour tout η dans Σ_3. Donc pour g dans G_3, l'application $\Phi(g)$ définie sur $(\Sigma_3/\equiv)$ par

$$\forall\, x \in \Sigma_3, \quad c_x \overset{\Phi(g)}{\mapsto} g(c_x)$$

est injective et par suite, constitue une permutation de $(\Sigma_3/\equiv)$.
Il est facile de voir alors que Φ réalise un morphisme de G_3 dans $\mathfrak{S}(\Sigma_3/\equiv)$.

Déterminons le noyau de Φ. Un élément g de G_3 est dans le noyau de Φ si et seulement s'il laisse chaque classe globalement invariante, c'est-à-dire si et seulement si $x \equiv g(x)$, pour tout x dans Σ_3.
Pour un tel automorphisme, on peut alors trouver u, v et w dans $\mathbb{F}_p$ tels que

$$\begin{cases} g(e_1) = ue + (1-u)e_1 \\ g(e_2) = ve + (1-v)e_2 \\ g(e_3) = we + (1-w)e_3 \end{cases}.$$

La condition

$$g(e) = (1-v+w)e_1 - (u+1-2v+w)e_2 + (u-v+1)e_3 = e$$

conduit à $u = v = w$.
Enfin la condition

$$b(g(e_1), g(e_3)) = u(2-u) = 0$$

fournit $u = 0$ ou $u = 2$.

Réciproquement l_3 et l'automorphisme g qui envoi la base canonique sur

$$(2e - e_1, 2e - e_2, 2e - e_3)$$

sont bien des éléments du noyau c'est-à-dire

$$\text{Ker } \Phi = \{\mathrm{l}_3, g\}.$$

Par ailleurs, il existe un isomorphisme Ψ de $\mathfrak{S}(\Sigma_3/\equiv)$ dans $\mathfrak{S}_{p+1}$.
Alors $\varphi = \Psi \circ \Phi$ vérifie les propriétés requises.

$\varphi(G_3) \subset \mathfrak{A}_{p+1}$: Il suffit de contrôler $\varphi(\{\tau_1, \tau_2\}) \subset \mathfrak{A}_{p+1}$, puisque τ_1 et τ_2 sont des générateurs de $G_3 = \Gamma_3$.

Remarquons pour cela que $\tau^p = \mathrm{l}_2$ et par suite $\tau_1^p = \tau_2^p = \mathrm{l}_3$.
Il en découle $\varphi(\tau_1)^p = \varphi(\tau_2)^p = \mathrm{Id}$ et, puisque p est impair, le résultat annoncé.

13 $\varphi(G_3) = \mathfrak{A}_4$ pour $p = 3$: Dans ce cas $\varphi(G_3)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$.
Il suffit de comparer les cardinaux.

On a
$$|\varphi(G_3)| = |G_3/\{\mathrm{Id}, g\}| = |G_3|/2 = 12 = |\mathfrak{A}_4|,$$
d'où le résultat.

$\varphi(G_3) \sim \mathfrak{A}_5$ pour $p = 5$: $\varphi(G_3)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_6$ de cardinal 60.
Pour répondre à la question, nous allons montrer plus généralement que tout sous-groupe H d'ordre 60 de $\mathfrak{A}_6$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Faisons opérer $\mathfrak{A}_6$ par translation sur le quotient à gauche
$$Q = (\mathfrak{A}_6/H) = \{\sigma H\ ; \sigma \in \mathfrak{A}_6\},$$
en posant :
$$\forall\, (g, \sigma) \in \mathfrak{A}_6^2, \quad g.(\sigma H) = (g\sigma)H.$$
Cette action est en fait associée au morphisme de groupes de $\mathfrak{A}_6$ dans $\mathfrak{S}(Q)$
$$\Theta : g \mapsto \Theta(g)$$
tel que :
$$\forall\, (g, \sigma) \in \mathfrak{A}_6^2, \quad \Theta(g)(\sigma H) = (g\sigma)H.$$

Remarquons alors l'inclusion $\Theta(\mathfrak{A}_6) \subset \mathfrak{A}(Q)$.
En effet, il suffit de noter que les 3-cycles, qui engendrent $\mathfrak{A}_6$ et sont d'ordre impair, sont envoyés sur des éléments de $\mathfrak{A}(Q)$.
Ker Θ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_6$, qui en outre est contenu dans $H \neq \mathfrak{A}_6$.
Le groupe $\mathfrak{A}_6$ étant simple (classique), on a Ker $\Theta = \{\mathrm{Id}\}$, c'est-à-dire que Θ est injective. On en déduit successivement
$$\begin{aligned} H &\sim \Theta(H) \\ &= \{\vartheta \in \mathfrak{A}(Q)\ ; \vartheta(H) = H\} \\ &\sim \mathfrak{A}(Q - \{H\}) \\ &\sim \mathfrak{A}_5. \end{aligned}$$